Musterlösungen zu den

Aufgaben zur Finanzmathematik

1.1. Aufgabe:

Paul bringt EUR 6.000 zu 10% Zinseszinsen zur Bank.

Wie groß ist sein Kapital nach 4 Jahren?

LÖSUNG:

$K_n = K_0 \cdot q^n$, daher ergibt sich als Endkapital $K_4 = 6.000 \cdot 1{,}1^4 = 8.784{,}60$ EUR.

1.2. Aufgabe:

Eine in drei Jahren fällige Schuld in Höhe von EUR 5.000 soll heute zurückgezahlt werden.

Wie viel muss man zurückzahlen, wenn 10% Zinseszinsen zugrunde gelegt werden?

LÖSUNG:

$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$, daher ergibt sich ein heute zurückzuzahlender Betrag in Höhe von $K_0 = \frac{K_3}{q^3} = \frac{5.000}{1{,}1^3} = \frac{5.000}{1{,}331} = 3.756{,}57$ EUR

1.3. Aufgabe:

Ein Freund schuldet Paul EUR 500, die er in einem Jahr zurückzahlen soll.

Wie viel müsste er ihm zahlen, wenn er das Geld heute zurückzahlen würde und Paul das Geld zu einem Zinssatz von 3,5% auf einem Sparkonto anlegen könnte?

LÖSUNG:

$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$, daher ergibt sich ein heute zurückzuzahlender Betrag in Höhe von $K_0 = \frac{K_1}{q^1} = \frac{500}{1{,}035} = 483{,}09$ EUR

1.4. Aufgabe:

Durch welche Summe kann man heute eine Zahlung von EUR 1.000, die erst in zwei Jahren fällig ist, ablösen (p=7%)?

LÖSUNG:

$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$, daher ergibt sich ein heute zurückzuzahlender Betrag in Höhe von $K_0 = \frac{K_2}{q^2} = \frac{1.000}{1,07^2} = 873,44$ EUR

1.5. Aufgabe:

Paul leiht sich EUR 1.000 und soll nach 3 Jahren unter Berücksichtigung von Zinseszinsen EUR 1.200 zurückzahlen.

Wie hoch ist der Zinsfuß?

LÖSUNG:

Aus der Formel für den Zinsfuß $p = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right) \cdot 100$ ergibt sich

$$p = \left(\sqrt[3]{\frac{K_3}{K_0}} - 1 \right) \cdot 100 = \left(\sqrt[3]{\frac{1.200}{1.000}} - 1 \right) \cdot 100 = \left(\sqrt[3]{1,2} - 1 \right) \cdot 100 = (1,06266 - 1) \cdot 100 = 6,266\ \%.$$

1.6.Aufgabe:

Paul möchte eine größere Anschaffung vornehmen, für die er einen Betrag von 1.000 EUR benötigt.

Ein Bankkredit würde an Jahreszinsen 8,5 % kosten. Er kann diesen nach 10 Monaten zurückzahlen.

Ein Überziehungskredit auf seinem privaten Bankkonto kostet einen Jahreszins von 14 %. Diesen könnte er, wenn er sich ein wenig einschränkt, in monatlichen Raten von EUR 100 „zurückzahlen".

Welchen Kredit sollte er wählen?

LÖSUNG:

Zunächst zu den Kosten des Bankkredits:

Paul benötigt 1000 EUR zu 8,5 % Zinsen PRO JAHR. Da er diesen aber bereits nach 10 Monaten zurückzahlen kann, fallen nur $8{,}5\% \cdot \frac{10\,\text{Monate}}{12\,\text{Monate}} \cdot 1000\,\text{EUR}$ = 70,83 EUR Zinsen an.

Falls Paul den Überziehungskredit in Anspruch nimmt, kann er diesen mit monatlich 100 EUR tilgen. Das bedeutet, dass es im

ersten Monat 1000 EUR zu verzinsen hat,
zweiten Monat 900 EUR zu verzinsen hat,
dritten Monat 800 EUR zu verzinsen hat, usw.

Für jeden Monat fallen $\frac{14\%}{12\,\text{Monate}} = \frac{14}{100} \cdot \frac{1}{12} = \frac{14}{100 \cdot 12}$ an Zinsen an, also für den

ersten Monat $\frac{14}{100 \cdot 12} \cdot 1000\,\text{EUR}$

zweiten Monat $\frac{14}{100 \cdot 12} \cdot 900\,\text{EUR}$

dritten Monat $\frac{14}{100 \cdot 12} \cdot 800\,\text{EUR}$ usw. bis zum

zehnten Monat $\frac{14}{100 \cdot 12} \cdot 100\,\text{EUR}$.

Dies alles muss man nun aufaddieren, also

$$\frac{14}{100 \cdot 12} \cdot 1000 + \frac{14}{100 \cdot 12} \cdot 900 + \frac{14}{100 \cdot 12} \cdot 800 + ... + \frac{14}{100 \cdot 12} \cdot 100 =$$
$$\frac{14}{100 \cdot 12} \cdot (1000 + 900 + 800 + ... + 100)$$

Mit der Formel für die arithmetische Reihe (Trick des „kleinen" Gauß, Definition 4.4 unserer Vorlesung) ergibt sich

$$1000 + 900 + 800 + ... + 100 = \frac{1000 + 100}{2} \cdot 10 = 5500$$

Für den Überziehungskredit sind also $\frac{14}{12 \cdot 100} \cdot 5500 = 64{,}17\,\text{EUR}$ fällig.

Daher wäre der Überziehungskredit günstiger.

1.7. Aufgabe:

Die Großbank „Wucher + Sohn“ gibt neuerdings Sparbriefe mit 10 Jahren Laufzeit heraus, die folgende Zinsen bringen: 5 Jahre lang 5 % und dann 5 Jahre lang 10 %. Welchem Durchschnittszinssatz entspricht das?

LÖSUNG:

Sie legen Ihr Anfangskapital K_o zunächst für 5 Jahre zu 5 % an. Dann besitzen Sie nach diesen ersten 5 Jahren einen Betrag von $K_5 = K_o \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^5$. Diesen Betrag legen Sie nun für weitere 5 Jahre zu 10 % an. Damit haben Sie nach 10 Jahren ein Kapital von $K_{10} = K_o \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^5 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^5$.

Diesen Betrag müssen Sie nunmehr vergleichen mit dem Anfangskapital K_o, dass Sie durchgehend für 10 Jahre zu einem Zinsfuß von p % anlegen.

In diesem Fall haben Sie nach den 10 Jahren einen Betrag von $K_{10} = K_o \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$.

Diese beiden Werte müssen Sie nun miteinander vergleichen, also:

$$K_{10} = K_o \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^5 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^5 = K_o \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}.$$

Daraus erhalten wir nun:

$$K_o \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^5 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^5 = K_o \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{10}{100}\right)^5 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^5 = \left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$

$$\Leftrightarrow (1{,}1)^5 \cdot (1{,}05)^5 = \left(1+\frac{p}{100}\right)^{10}$$

Durch Ziehen der 10. Wurzel erhalten wir:

$$\sqrt[10]{1{,}1^5 \cdot 1{,}05^5} = 1+\frac{p}{100}.$$

Subtraktion von 1 und Multiplikation mit 100 ergibt die gesuchte Lösung:

$$\left(\sqrt[10]{1{,}1^5 \cdot 1{,}05^5} - 1\right) \cdot 100 = p.$$

Unter Verwendung eines Taschenrechners erhält man hieraus:

p = 7,4709… %.

Bitte beachten Sie, dass der Durchschnittszinsfuß geringer ist, als das arithmetische Mittel der Zinsfüße!

Fazit:

1. Es spielt keine Rolle, ob Sie zuerst 5 % und anschließend die 10 % Zinsen erhalten, oder ob die Konditionen umgekehrt sind, also erst 10 % dann 5%.

2. Bitte hüten Sie sich vor folgendem Lösungsansatz:
   „Der Durchschnittszinssatz ist das arithmetische Mittel der einzelnen Zinsfüße, also: $\bar{p} = \frac{5 \cdot 10\% + 5 \cdot 5\%}{10} = 7{,}5\%$“.
   In der Welt der Zinsen darf man kein arithmetisches Mittel benutzen, sondern nur das *geometrische* Mittel!

1.8. Aufgabe:

Wie lange dauert es, bis sich EUR 5.000 bei 7,5% Zinseszinsen verdoppeln?

LÖSUNG:

Aus der Formel für die Laufzeit $n = \frac{\log\ K_n - \log\ K_0}{\log\ q} = \frac{\log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log\ q}$ folgt wegen $K_n = 2 \cdot K_0$:

$n = \frac{\log\left(\frac{2 \cdot K_0}{K_0}\right)}{\log\ q} = \frac{\log 2}{\log 1{,}075} = 9{,}5844$, also nach rund 9 Jahre und 7 Monaten hat sich der Betrag verdoppelt.

2.1. Aufgabe:

Ein Kapital von K_0 = 2.000 EUR wurde auf 10 Jahre bei einem Zinsfuß von 6% festgelegt.

Wie groß ist die Kapitalzunahme nach Ablauf der Anlagezeit bei
a) einfacher Verzinsung?
b) halbjähriger Verzinsung mit Zinseszinsen?
c) stetiger Verzinsung?

LÖSUNG:

a) Bei einfacher Verzinsung erhalten Sie in jedem Jahr nur die Zinsen ausgezahlt, sie werden also nicht weiter mitverzinst. Daher beträgt die Kapitalzunahme gerade die Summe der einzelnen Zinszahlungen, also $Z = 2.000 \cdot \frac{6}{100} \cdot 10 = 1.200$ EUR.

b) Bei halbjähriger Verzinsung ergibt sich (unter Beachtung, dass 10 Jahre nun 20 Zinszahlungen mit jeweils dem halben Zinsfuß entspricht) hieraus ein Endkapital von $K_{10} = 2.000 \cdot \left(1 + \frac{6}{2 \cdot 100}\right)^{20} = 3.612{,}22$ EUR, woraus nach Subtraktion des Anfangskapitals eine Kapitalzunahme von Z = 1.612,22 EUR folgt.

c) Bei stetiger Verzinsung ergibt sich nach 10 Jahren ein Endkapital von $K_n = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot 10} = 2.000 \cdot e^{\frac{6}{100} \cdot 10} = 2.000 \cdot e^{0{,}6} = 3.644{,}24$ EUR, woraus eine Kapitalzunahme von Z = 1.644,24 EUR resultiert.

2.2. Aufgabe:

Ein Kapital K_0 = 5.000 EUR wird zu p = 8% angelegt.

Auf welchen Betrag wächst das Kapital in 4 Jahren bei
a) jährlicher,
b) halbjährlicher,
c) monatlicher Verzinsung?

LÖSUNG:

a) Jährliche Verzinsung: $K_4 = 5.000 \cdot \left(1+\frac{8}{100}\right)^4 = 6.802,44$ EUR.

b) Halbjährliche Verzinsung: $K_4 = 5.000 \cdot \left(1+\frac{8}{2 \cdot 100}\right)^8 = 6.842,85$ EUR.

c) Monatliche Verzinsung: $K_4 = 5.000 \cdot \left(1+\frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{48} = 6.878,33$ EUR.

2.3. Aufgabe:

Auf wie viel wächst ein Kapital von 500 EUR bei einem Zinsfuß von 8% in fünf Jahren bei

a) jährlicher Verzinsung und
b) stetiger Verzinsung an?

LÖSUNG:

a) Jährliche Verzinsung: $K_5 = 500 \cdot \left(1+\frac{8}{100}\right)^5 = 734,66$ EUR.

b) Stetige Verzinsung: $K_5 = 500 \cdot e^{\frac{8}{100} \cdot 5} = 745,92$ EUR.

3.1. Aufgabe:

Der Ökonomie-Student Paul hat bei seinem Vetter Franz einen Schuldschein unterschrieben, nach dem er in 2 Jahren EUR 8.000 an diesen zahlen muss.

Er vereinbart nun mit Franz, die Schuld in 5 Jahres-Raten zurückzuzahlen und sofort damit zu beginnen.

Wie hoch sind bei einem Zinsfuß von 6 % diese Raten?

LÖSUNG:

Zunächst bestimmen wir den Barwert dieser 8.000 Euro, das bedeutet, dass wir diesen Betrag, der ja erst in zwei Jahren fällig ist, auf den heutigen Tag abzinsen.

$$K_0 = \frac{K_2}{q^2} = \frac{8.000}{1{,}06^2} = 7.119,97 \text{ Euro.}$$

K_2 steht hierbei für den in zwei Jahren fälligen Betrag (bitte beachten Sie, dass $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6}{100} = 1{,}06$).

Diesen Betrag von 7.119,97 Euro kann nämlich der Franz heute zu 6 % anlegen und hat dann heute in zwei Jahren genau die 8.000 Euro auf dem Konto, die der Paul dann (also in zwei Jahren) eigentlich zahlen müsste.

Der Franz steht in zwei Jahren also gleich gut da, egal ob er die 8.000 Euro IN ZWEI JAHREN erhält oder HEUTE die geringere Summe von 7.119,97 Euro, die er ja zu 6 % anlegen kann.

Diesen Betrag von 7.119,97 Euro, der ja HEUTE fällig ist, den will der Paul nun in fünf Raten abstottern und er will HEUTE beginnen.

In der Schreibweise der Vorlesung / Formelsammlung gilt also $R_0^* = 7.119{,}97$ Euro

Zur Berechnung der

Rate (vorschüssige Rente): $r^* = \frac{R_n^*}{q} \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$

benötigen wir der Endwert R_5^* dieser Rente den wir aus der folgenden Formel leicht errechnen können:

Barwert (vorschüssige Rente): $R_0^* = \frac{R_n^*}{q^n}$

Daraus folgt sofort:

$$R_n^* = R_0^* \cdot q^n$$

Setzen wir dies nun in die Formel zur Berechnung der Rate ein, so erhalten wir:

$$r^* = \frac{R_0^* \cdot q^n}{q} \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = R_0^* \cdot q^{n-1} \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

Somit erhalten wir

$$r^* = 7.119{,}97 \cdot 1{,}06^{5-1} \cdot \frac{1{,}06 - 1}{1{,}06^5 - 1} = 1.594{,}58 \text{ Euro.}$$

3.2. Aufgabe:

Der Student Paul hat am 01.01.1995 mit einer Bank einen Sparvertrag zu einem Zinsfuß von p = 6 % abgeschlossen. Er hat 10 Jahre am Anfang eines jeden Jahres EUR 1.000 auf ein Konto eingezahlt.

Da er sich nach seinem Studium in 5 Jahren selbständig machen möchte, will er am Ende des Jahres 2009 als Startkapital EUR 25.000 auf seinem Sparkonto haben und ist bereit ab 01.01.2005 eine höhere Rate zu zahlen.

Wie groß sind die Raten, die Paul am Anfang eines jeden Jahres zahlen muss, wenn er Ende 2009 EUR 25.000 besitzen will?

LÖSUNG:

Zunächst bestimmen wir den Endwert der bereits geleisteten Zahlungen von EUR 1.000: Aus der Formel folgt für den Endwert (vorschüssige Rente):

$$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1.000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{10} - 1}{1{,}06 - 1} = 13.971{,}64 \text{ EUR.}$$

Dieser bereits angesparte Betrag von 13.971,64 EUR verbleibt die restlichen 5 Jahre zu 6 % Zinsen auf dem Sparkonto.

Nach diesen 5 Jahren wird daraus ein Betrag von

$$K_n = K_0 \cdot q^n = 13.971{,}64 \cdot 1{,}06^5 = 18.697{,}21 \text{ EUR.}$$

Nun will der Paul ab dem 01.01.2005 eine erhöhte Rate zahlen, so dass sich bis Ende 2009 die 25.000 EUR ergeben.

Dazu muss er noch einen Betrag von (25.000 - 18.697,21) EUR, also von 6302,79 EUR ansparen.

Mit der Formel für die Rate (vorschüssige Rente) ergibt sich nun

$$r^* = \frac{R_n^*}{q} \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = \frac{6.302{,}79}{1{,}06} \cdot \frac{1{,}06 - 1}{1{,}06^5 - 1} = 1.054{,}80 \text{ EUR als neue monatliche Rate.}$$

3.3. Aufgabe:

Herr C. beschließt bei der Geburt seines Sohnes K. ab dem 01.01.2005 jeweils am Jahresanfang EUR 1.000 auf ein Konto einzuzahlen.

a) Über welchen Betrag kann sein Sohn nach 18 Jahren verfügen, wenn ein Zinssatz von 5% unterstellt wird?

b) Wie hoch sollte die Rate sein, damit der Sohn über einen Betrag von EUR 36.000 verfügen kann?

LÖSUNG:

a) Aus der Formel für den Endwert (vorschüssige Rente) erhalten wir:

$$R_n^* = r^* \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1.000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{18} - 1}{1{,}05 - 1} = 29.539{,}00 \text{ EUR.}$$

b) Hier verwenden wir die Formel für die Rate (vorschüssige Rente) und erhalten:

$$r^* = \frac{R_n^*}{q} \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = \frac{36.000}{1{,}05} \cdot \frac{1{,}05 - 1}{1{,}05^{18} - 1} = 1.218{,}73 \text{ EUR.}$$

3.4. Aufgabe:

Der Student Paul möchte sich am 01.01.2005 eine Schuhbindemaschine kaufen.

Für den Kaufpreis zahlt er am 01.01.2002 EUR 1.000, am 01.01.2003 EUR 500 und am 01.01.2004 EUR 2.000 auf ein Sparbuch ein.

Die Bank zahlt 5% Zinsen.

Mit welcher konstanten Jahresrate hätte er dasselbe Ergebnis erreicht?

LÖSUNG:

Zunächst berechnen wir den Endwert der Zahlungsreihe, also den Wert der Summe der Zahlungen am 01.01.2005:

$$K_3 = 1.000 \cdot 1{,}05^3 + 500 \cdot 1{,}05^2 + 2.000 \cdot 1{,}05 = 3.808{,}88 \text{ EUR.}$$

Mit der Formel für die Rate einer vorschüssigen Rente folgt:

$$r^* = \frac{R_n^*}{q} \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = \frac{3.808{,}88}{1{,}05} \cdot \frac{1{,}05 - 1}{1{,}05^3 - 1} = 1.150{,}68 \text{ EUR.}$$

Dies bedeutet:
Hätte Paul am 01.01.2002, 01.01.2003 und 01.01.2004 jeweils 1.150,68 EUR auf das Konto eingezahlt, hätte er am 01.10.2005 den gleichen Endbetrag von 3.808,88 EUR auf seinem Konto wie bei seinen durchgeführten Zahlungen.

3.5 Aufgabe:

Welchen Betrag muss man bei 4% Zinseszinsen jeweils am Ende eines Jahres auf dem Konto einzahlen, wenn man nach 5 Jahren EUR 10.000 auf dem Konto haben will?

LÖSUNG:

Es handelt sich hierbei um eine nachschüssige Rente. Daher folgt für deren Rate:

$$r = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 10.000 \cdot \frac{1{,}04 - 1}{1{,}04^5 - 1} = 1.846{,}27 \text{ EUR.}$$

3.6 Aufgabe:

Fritz F. will am 01.04. dieses Jahres ein Studium zum Diplom-Ökonomen beginnen. Wegen der vorgeschriebenen Regelstudienzeit weiß er, dass er genau vier Jahre später sein Studium beenden wird.

Um seinen Start ins Berufsleben zu erleichtern, möchte er bis dahin EUR 10.000 gespart haben.

Seine Bank bietet ihm einen Zinssatz von 4% pro Jahr.

Welchen gleichbleibenden Betrag muss Fritz F. jährlich einzahlen?

LÖSUNG:

Hier müssen wir die beiden Lösungsvarianten „vorschüssig“ und „nachschüssig“ unterscheiden:

a) Vorschüssig:

$$r^* = \frac{R_n^*}{q} \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = \frac{10.000}{1{,}04} \cdot \frac{1{,}04 - 1}{1{,}04^4 - 1} = 2.264{,}33 \text{ EUR.}$$

b) Nachschüssig:

$$r = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 10.000 \cdot \frac{1{,}04 - 1}{1{,}04^4 - 1} = 2.354{,}90 \text{ EUR.}$$

3.7 Aufgabe:

Jemand zahlt 8 Jahre zum Jahresende EUR 1.500 auf ein Konto ein.

Wie viel ist nach 8 Jahren auf dem Konto, bei 7% Zinseszinsen?

LÖSUNG:

Aus der Formel für die nachschüssige Rente folgt mit n = 8, q = 1,07 und r = 1.500:

$$R_5 = 1.500 \cdot \frac{1{,}07^8 - 1}{1{,}07 - 1} = 1.500 \cdot \frac{1{,}7182 - 1}{0{,}07} = 1.500 \cdot 10{,}2598 = 15.389{,}70 \text{ EUR.}$$

3.8. Aufgabe:

Franz F. Aulmeier, Student in Frührente, hat u. a. Anspruch auf eine zu Beginn eines Jahres fällige Rente in Höhe von EUR 5.000 / Jahr für 15 Jahre.

Er möchte sich diese Rente auf einmal auszahlen lassen (Zinsfuß 5 %).

Er zahlt den Betrag auf ein Sparkonto ein (Zinsfuß 3 %).

Wieviel muss er jetzt noch dazuzahlen, damit er nach 3 Jahren EUR 75.000 auf dem Sparkonto hat?

Lösung:

Der Franz hat Anspruch auf eine zu Beginn des Jahres fällige Rente in Höhe von 5000 EUR pro Jahr, dies für 15 Jahre.

Wenn Franz die einzelnen Ratenzahlungen bis zum Ende der 15 Jahre kassieren würde und jeweils zu 5 % auf einem Sparkonto anlegen würde, so hätte er nach diesen 15 Jahren folgenden Betrag angespart (bitte beachten Sie, dass $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$):

Endwert (vorschüssige Rente): $R_n^* = r^* \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$,

also Endwert = $5000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{15} - 1}{1{,}05 - 1}$ = 113.287,46 EUR.

Dieser Endwert muss auf den heutigen Tag abgezinst werden:

Barwert (vorschüssige Rente): $R_0^* = \frac{R_n^*}{q^n}$

also Barwert = $5000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{15}-1}{1,05-1} \cdot \frac{1}{1,05^{15}}$ = $\frac{113287,47}{1,05^{15}}$ =54.493,20 EUR.

Da Franz nach 3 Jahren 75.000 EUR haben möchte, muss er HEUTE (abgezinst) $\frac{75000}{1,03^3} = 68.635,62$ EUR auf das Sparkonto einzahlen.

Aus der kapitalisierten Rente hat er bereits 54.493,20 EUR, so dass er heute noch einen Differenzbetrag von 68.635,62 EUR - 54.493,20 EUR = 14.142,42 EUR aufbringen muss, um sein Sparziel zu erreichen.